第 8 讲　点估计

知识梳理

一　点估计的基本流程

1. 矩估计法

① 求出分布（含待估参数θ）的期望（含参数θ）

② 变换期望的表达式为$\theta = f(E(X))$的形式

③ 将$E(X)$换成$\overline{X}$，得到矩估计量$\hat{\theta} = f(\overline{X})$

2. 极大似然估计法

· 假设有简单随机样本$X_1,\cdots,X_n$，分布律或密度函数中含有待估参数λ

① 写出极大似然函数$L(\lambda)$：所有X_1对应取值的概率或概率密度之积

② 取对数$\ln L(\lambda)$（将乘积式化为加和式，方便求导）

③ 对$\ln L(\lambda)$求导（若参数有多个，则分别对各个参数求偏导）

④ 如果存在极值，找到极大值对应的λ，作为极大似然估计量$\hat{\lambda}$

如果$L(\lambda)$是单调的，找到λ取值范围的最值使$L(\lambda)$达到最大值，作为极大似然估计量$\hat{\lambda}$

二　点估计量的评价

1. 无偏性准则

无偏性准则

$\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计 $\Leftrightarrow$ $E(\hat{\theta}) = \theta$

2. 有效性准则

有效性准则

若估计量都是θ的无偏估计，$\mathrm{Var}(\hat{\theta})$越小的更有效（越小越好）

3. 均方误差准则

均方误差

$$\mathrm{Mse}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2$$

4. 相合性准则

相合性准则

$\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计 $\Leftrightarrow$ $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta, n \to +\infty$

题型解析

十四　估计量评价

1.题型简述与解法

· 以填空题或大题的形式，判断某估计量是否满足四种准则之一，或已知估计评价反求参数

· 代入计算即可，注意要运用上一讲的结论以及期望方差的运算性质

2.历年考试典型例题

① **无偏估计**

例 1　（15－16 **春夏**）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本；若 $aX_1^2+bX_1X_2$ 是 σ^2 的无偏估计，则 $(a-b)=$ __________.

解　由无偏估计 $\to$ $E(aX_1^2+bX_1X_2)=aE(X_1^2)+bE(X_1X_2)=a(\mu^2+\sigma^2)+b\mu^2=\sigma^2$

比较系数：$a+b=0$，$a=1$ $\to$ $b=-1$，因此 $a-b=2$

② **有效性准则**

例 2　（16－17 **春夏**）总体 X 的密度函数 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta^2}, 0<x<\theta \\ 0,\quad \text{其他}\end{cases}$，$\theta>0$ 未知，X_1,X_2,X_3 是 X 的简单随机样本，设 $T=aX_1+bX_2+cX_3$，其中 a,b,c 是实数.

（1）求 T 是 θ 的无偏估计的充分必要条件；

（2）问 a,b,c 取什么值时，T 是 θ 的有效估计量？说明理由.

解　（1）T 是 θ 的无偏估计 $\Leftrightarrow$ $E(T)=aE(X_1)+bE(X_2)+cE(X_3)=(a+b+c)E(X)=\theta$

$\because$ $E(X)=\int_0^\theta \dfrac{2x^2}{\theta^2}\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\theta$　$\therefore$ $(a+b+c)\dfrac{2}{3}\theta=\theta$ $\Leftrightarrow$ $a+b+c=\dfrac{3}{2}$

（2）有效的前提是无偏，因此 $a+b+c=\dfrac{3}{2}$

$\because$ $\mathrm{Var}(T)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(X)+c^2\mathrm{Var}(X)=(a^2+b^2+c^2)\mathrm{Var}(X)$

由基本不等式，$a^2+b^2+c^2 \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{3}$

$\therefore$ 当 $a=b=c=\dfrac{1}{2}$ 时，$\mathrm{Var}(T)$ 取到最小值，此时 T 是 θ 的有效估计量

③ **均方误差准则**

例 3　（17－18 **春夏**）设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_{16}$ 是总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值.若 $\mu=0$，用 $T=16(\overline{X})^2$ 估计 σ^2，则均方误差 $\mathrm{Mse}(T)=$ __________

解　$\because$ $\overline{X}\sim N(0,\sigma^2)$ $\to$ $\dfrac{16}{\sigma^2}\overline{X}^2 \sim \chi^2(1)$ $\to$ $E(\overline{X}^2)=\dfrac{\sigma^2}{16}$，$D(\overline{X}^2)=\dfrac{2\sigma^4}{16^2}$

∴ $E(T)=16E(\overline{X}^2)=\sigma^2$， $D(T)=2\sigma^4$

∵ $\mathrm{Mse}(T)=D(T)+[E(T)-\sigma^2]^2=2\sigma^4$

∴ $E(Y)=\mu-\mu=0$， $D(Y)=\dfrac{\sigma^2}{2}+\dfrac{\sigma^2}{16}-2\mathrm{Cov}(\dfrac{X_1+X_2}{2},\overline{X})$

∵ $\mathrm{Cov}(\dfrac{X_1+X_2}{2},\overline{X})=\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{2}\dfrac{1}{2}X_i,\sum_{j=1}^{16}\dfrac{1}{16}X_j)=\dfrac{1}{32}\mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^{2}X_j,\sum_{i=1}^{16}X_j)=\dfrac{D(X_1)+D(X_2)}{32}=\dfrac{\sigma^2}{16}$

∴ $D(Y)=\dfrac{\sigma^2}{2}+\dfrac{\sigma^2}{16}-2\dfrac{\sigma^2}{16}=\dfrac{7}{16}\sigma^2$ ∴ $Y\sim N(0,\dfrac{7}{16}\sigma^2)$

∴ $P(Y>\sigma)=1-\Phi(4/\sqrt{7})=1-\Phi(1.51)=0.07$

④ **相合性准则**

例 4 （14—15 秋冬）随机变量 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}2\theta^2 x, 0<x<\theta^{-1}\\ 0, \quad 其他\end{cases}$．（2）若 $\theta>0$ 是未知参数，设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\dfrac{1}{\overline{X}}$ 是 θ 的相合估计吗？答：__________（是或不是）．

解 $E(X)=\int_0^{\theta^{-1}}2\theta^2x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\theta^{-1}$ ∴ $\dfrac{1}{\overline{X}}\xrightarrow{P}\dfrac{1}{E(X)}=\dfrac{3}{2}\theta\neq\theta$ → 不是相合估计

十五 求矩估计并评价

1.题型简述与解法

· 按照求矩估计的流程依葫芦画瓢即可：**求** $E(X)$ → **转换成** $\theta=$ **的形式** → **将** $E(X)$ **换成** $\overline{X}$

2.历年考试典型例题

例 1 （15—16 秋冬）设总体 X 的分布律如下表，其中 $0<\theta<1$ 为未知参数.

X	0	1	3	6
概率	$\dfrac{\theta}{2}$	$\dfrac{\theta}{2}$	$\dfrac{2(1-\theta)}{3}$	$\dfrac{1-\theta}{3}$

（1）$X_1,\cdots,X_n$ 为来自 X 的简单随机样本，求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$，并判断其是否为无偏估计量，是否为相合估计量，说明理由；

解 $E(X)=0\times\dfrac{\theta}{2}+1\times\dfrac{\theta}{2}+3\times\dfrac{2(1-\theta)}{3}+6\times\dfrac{1-\theta}{3}=4-\dfrac{7\theta}{2}$ → $\theta=\dfrac{2}{7}(4-E(X))$

∴ 矩估计量 $\hat{\theta}_1=\dfrac{2}{7}(4-\overline{X})$，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

∵ $E(\hat{\theta}_1)=\dfrac{2}{7}(4-E(\overline{X}))=\dfrac{2}{7}(4-E(X))=\dfrac{2}{7}(4-4+\dfrac{7}{2}\theta)=\theta$ ∴ 是无偏估计

$n\to\infty$， $\hat{\theta}_1=\dfrac{2}{7}(4-\overline{X})\xrightarrow{P}\dfrac{2}{7}(4-E(X))=\theta$ ∴ 是相合估计

十六　求极大似然估计并评价

1.题型简述与解法

- 按照求极大估计的流程依葫芦画瓢即可：**列出** $L(\lambda)\rightarrow$ **取对数** $\rightarrow$ **求导** $\rightarrow$ **找最大值**
- 注意：如果 $L(\lambda)$ 是单调函数，就要找 λ 的取值范围，此时如果密度函数给出 $0<x<\lambda$ 之类的

  就能得到 λ 的最值，即 $\max\{X_i\}$ 之类
- 因此在求期望时就需要用到第 5 讲求随机变量函数的分布函数的技巧了
- 此外，有时还要求 $P(X?)$ 的极大似然估计，将参数的极大似然估计代入即可

2.历年考试典型例题

例 1　（16—17 **秋冬**）大学新生报到时，无家长陪同，1 位家长陪同，2 位家长陪同的概率分别为 θ，$(1-\theta)/4$，$3(1-\theta)/4$（这里 θ 未知）.现按简单随机抽样调查了 100 名新生，设新生中陪同的家长数是 0 位、1 位、2 位的人数分别是 n_0,n_1,n_2，$n_0+n_1+n_2=100$.设 Y 表示 100 个新生中无家长陪同的人数.

（2）求 $P(Y\leq 13)$ 的近似值（用 θ 表示）

（3）（节选）求 θ 的极大似然估计量；

（4）（节选）若 $n_0=10$，$n_1=26$，$n_2=64$，求 θ 的极大似然估计值，以及 $P(Y\leq 13)$ 的极大似然估计近似值.

解　（2）由题意 $Y\sim B(100,\theta)$，因此 $Y\sim N(100\theta,100\theta(1-\theta))$

$$\therefore\ P(Y\leq 13)=P\left(\frac{Y-100\theta}{\sqrt{100\theta(1-\theta)}}\leq\frac{13-100\theta}{\sqrt{100\theta(1-\theta)}}\right)=\Phi\left(\frac{13-100\theta}{\sqrt{100\theta(1-\theta)}}\right)$$

（3）$L(\theta)=\prod_{i=1}^{100}P(X_i=x_i)=\theta^{n_0}\cdot\left(\frac{1-\theta}{4}\right)^{n_1}\cdot\left(\frac{3(1-\theta)}{4}\right)^{n_2}$

取对数：$\ln L(\theta)=n_0\ln\theta+(n_1+n_2)\ln(1-\theta)+C$（$C$ 为与 θ 无关的值）

求导：$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n_0}{\theta}-\frac{n_1+n_2}{1-\theta}=0\ \rightarrow\ \hat{\theta}=\frac{n_0}{n_0+n_1+n_2}=\frac{n_0}{100}$

（4）代入 $n_0=10$：$\hat{\theta}=\frac{10}{100}=0.1$

$P(Y\leq 13)=\Phi(1)=0.84$

例 2　（20—21 **秋冬**）设总体 X 的概率密度函数为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2\theta^2}{x^3}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 是未知参数，$X_1,\cdots,X_n$ 是总体 X 的简单随机样本，

（2）求 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$，并判断其是否为 θ 的无偏估计量，说明理由.

解 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2\theta^2}{X_i^3}=\frac{2^n\theta^{2n}}{\prod_{i=1}^{n}X_i^3}(X_1,\cdots,X_n\geq\theta)$

取对数：$\ln L(\theta)=L(\theta)=n\ln 2+2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^{n}\ln X_i \rightarrow L(\theta)$ 单调递增

$\therefore$ 当 θ 取到最大值时，$L(\theta)$ 达到最大值 $\because X_1,\cdots,X_n\geq\theta \rightarrow \hat{\theta}_2=\min\{X_i\}$

下面判断 $\hat{\theta}_2$ 是否为无偏估计

$P(\hat{\theta}_2\leq z)=P(\min\{X_i\}\leq z)=1-P(X_1>z,\cdots,X_n>z)=1-P^n(X>z)=1-[1-F_X(z)]^n$

$\therefore F_X(x)=\begin{cases}0, & x<\theta\\ 1-\dfrac{\theta^2}{x^2}, & x\geq\theta\end{cases} \rightarrow F_Z(z)=1-[1-F_X(z)]^n=\begin{cases}0, & z<\theta\\ 1-\dfrac{\theta^{2n}}{z^{2n}}, & z\geq\theta\end{cases}$

$\therefore f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z<\theta\\ \dfrac{2n\theta^{2n}}{z^{2n+1}}, & z\geq\theta\end{cases} \quad E(\hat{\theta}_2)=\int_{\theta}^{+\infty}\frac{2n\theta^{2n}}{z^{2n}}\mathrm{d}z=\frac{2n}{2n-1}\theta\neq\theta$

$\therefore \hat{\theta}_2$ 不是 θ 的无偏估计

例 3 （18—19 **春夏**）设总体 X 的分布律为 $P(X=0)=a$，$P(X=1)=b$，$P(X=2)=a+b$，$P(X=3)=1-2(a+b)$.未知参数 $a>0$，$b>0$，$a+b<0.5$，$X_1,\cdots,X_{400}$ 是总体 X 的简单随机样本，其中 0，1，2，3 分别出现 60，100，140，100 次.（1）求 a,b 的极大似然估计值；

解 $L(a,b)=\prod_{i=1}^{n}P(X=x_i;a,b)=a^{60}b^{100}(a+b)^{140}[1-2(a+b)]^{100}$

$\ln L(a,b)=60\ln a+100\ln b+140\ln(a+b)+100\ln[1-2(a+b)]$

含有两个参数，因此求偏导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ln L(a,b)}{\partial a}&=\frac{60}{a}+\frac{140}{a+b}-\frac{200}{1-2(a+b)}\\ \frac{\partial\ln L(a,b)}{\partial b}&=\frac{100}{b}+\frac{140}{a+b}-\frac{200}{1-2(a+b)}\end{aligned} \rightarrow \text{解得}\begin{cases}\hat{a}=9/64\\ \hat{b}=15/64\end{cases}$$

（严格上讲要求二阶导验证）